

Formelsammlung für technische Elektrodynamik

von

HERBERT THOMA

10. August 2000

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis	5
1 Grundlagen der Vektoranalysis	6
1.1 Einige Eigenschaften der Vektormultiplikationen	6
1.2 Koordinatensysteme	6
1.2.1 Umrechnung von kartesischen in Zylinderkoordinaten . . .	7
1.2.2 Umrechnung von kartesischen in Kugelkoordinaten	7
1.2.3 Umrechnung von Zylinder- in kartesische Koordinaten . .	7
1.2.4 Umrechnung von Kugel- in kartesische Koordinaten . . .	8
1.2.5 Umrechnung von Zylinder- in Kugelkoordinaten	8
1.2.6 Umrechnung von Kugel- in Zylinderkoordinaten	8
1.2.7 Kurven-, Flächen- und Volumenelemente	9
1.2.8 Vektorprodukte der Einheitsvektoren	9
1.2.9 Ableitungen der Einheitsvektoren	11
1.3 Differentialoperatoren	11
1.3.1 Gradient	11
1.3.2 Divergenz	12
1.3.3 Rotation	12
1.3.4 Laplace-Operator	13
1.3.5 Vektorgradient	14
1.3.6 Flächendivergenz und Flächenrotation	15
1.3.7 Differentialoperatoren bei „verschobenem“ Bezugspunkt und retardierten Größen	15

1.4	Integralsätze	17
1.4.1	Satz von Gauß	17
1.4.2	Sätze von Green	17
1.4.3	Satz von Stokes	17
1.5	Bestimmung eines Vektorfeldes aus seinen Quellen und Wirbeln .	17
1.6	Trigonometrische Beziehungen	18
2	Ladung, Strom, und elektromagnetisches Feld	19
2.1	Coulombsches Gesetz	19
2.2	Ladungsdichten	19
2.2.1	Raumladungsdichte	19
2.2.2	Flächenladungsdichte	19
2.2.3	Linienladungsdichte	19
2.2.4	Beispiele	19
2.3	Elektrischer Strom	20
2.3.1	Stromdichten	21
2.4	Elektromagnetisches Feld gleichförmig bewegter Punktladungen .	21
2.5	Elektromagnetische Wechselwirkung zweier gleichförmig bewegter Punktladungen	21
3	Maxwellsche Gleichungen	23
3.1	Differentielle Form der Maxwellschen Gleichungen	23
3.2	Integrale Form der Maxwellschen Gleichungen	23
3.3	Maxwellgleichungen mit \mathbf{D} und \mathbf{H}	23
3.4	Magnetischer Fluß und seine zeitliche Änderung	24
3.5	Gesetz von Biot-Savart	25
4	Elektrostatik	26
4.1	Grundgleichungen	26
4.2	Elektrostatisches Potential	26
4.3	Elektrischer Dipol	27
4.4	Poissonsche Differentialgleichung	28
4.5	Energie des \mathbf{E} -Feldes	29

5	Metallische Leiter	30
5.1	Ohmsches Gesetz	30
5.2	Hall-Effekt	30
5.3	Joulsche Wärme	31
5.4	Allgemeines Problem stationärer Stromverteilungen	31
5.5	Stromlose ruhende Metallkörper	32
5.6	Mehrleitersysteme	32
6	Magnetostatik	35
6.1	Grundgleichungen	35
6.2	Vektorpotential	35
6.3	Magnetischer Dipol	35
6.4	Induktivitätskoeffizienten	36
6.4.1	Selbstinduktivität	36
6.4.2	Wechselseitige Induktivitäten	37
6.5	Quasistatische Elektrodynamik	38
7	Induzierte quasistationäre Ströme	40
7.1	Induzierte Schleifenströme	40
7.2	Energie des \mathbf{B} -Feldes	41
7.3	Strom-Spannungs-Beziehungen bei Spule und Transformator . . .	42
7.4	Induktion in bewegten Leitern	42
8	Elektrisch polarisierbare Stoffe	43
8.1	Elektrische Polarisierung	43
8.2	Polarisationsladungen	43
8.3	Polarisationsstrom	43
8.4	Freie Ladungen und Verschiebungsdichte	44
8.5	Elektrische Materialgrößen	44
9	Magnetisch polarisierbare Stoffe	45
9.1	Magnetisierung	45
9.2	Magnetisierungsströme	45
9.3	Freie Ströme und magnetische Feldstärke	45
9.4	Magnetische Materialgrößen	45

10 Elektromagnetische Energiebilanz	47
10.1 Elektrische Energie	47
10.2 Magnetische Energie	47
10.3 Elektromagnetische Energiebilanz	47
11 Retardierte Lösungen der Maxwell Gleichungen	48
11.1 Wellengleichungen	48
11.2 Inhomogene Wellengleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{B}	48
11.3 Inhomogene Wellengleichungen für dynamische Potentiale	48
11.4 Retardierte Potentiale	48
11.5 Lösung der Maxwell-Gleichungen ohne Potentialansätze	49
11.6 Hertzscher Dipol	50
11.7 Fitzgeraldscher Dipol	50
A Naturkonstanten	51
B Symbole	51
Index	54

Abbildungsverzeichnis

1	Koordinatensysteme	6
2	Zur Bedeutung von \mathbf{r} und \mathbf{r}'	15
3	Wirkungsbereich der Operatoren	16
4	Kraftwirkung einer Linienladung	19
5	Kraftwirkung einer Linienladung 2	20
6	Wechselwirkung von Ladungen	22
7	Biot-Savart-Gesetz	25
8	Appoloniuskreis	26
9	Elektrischer Dipol	27
10	Stromverteilung in Leitern	31
11	Mehrleitersystem	33
12	Magnetischer Dipol	36
13	Selbstinduktivität	37
14	Gegeninduktivität	37

Literatur

- [1] KRÖGER, R. UND UNBEHAUEN, R.: *Elektrodynamik*. B. G. Teubner, 3., überarbeitete Auflage, Stuttgart, 1993
- [2] BRONSTEIN, I. N. UND SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 24. Auflage, Frankfurt/Main, 1989

1 Grundlagen der Vektoranalysis

1.1 Einige Eigenschaften der Vektormultiplikationen

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \text{ aber } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \\ (\mathbf{a}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \text{ und } (\mathbf{a}\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \text{ und } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= 0, \text{ falls } \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{o}, \text{ falls } \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \end{aligned}$$

1.2 Koordinatensysteme

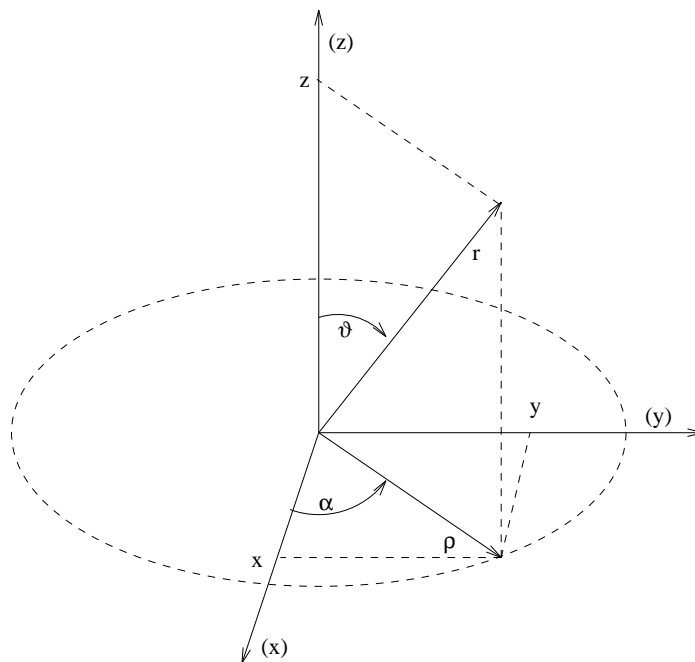


Abbildung 1: Koordinatensysteme

Es gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}; & r &= \sqrt{z^2 + \rho^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \sin \alpha &= \frac{y}{\rho}; & \cos \alpha &= \frac{x}{\rho}; & \tan \alpha &= \frac{y}{x} \\ \sin \vartheta &= \frac{\rho}{r}; & \cos \vartheta &= \frac{z}{r}; & \tan \vartheta &= \frac{\rho}{z} \end{aligned}$$

1.2.1 Umrechnung von kartesischen in Zylinderkoordinaten

Koordinaten

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= z\end{aligned}$$

Einheitsvektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\alpha &= -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

1.2.2 Umrechnung von kartesischen in Kugelkoordinaten

Koordinaten

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vartheta &= \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \alpha &= \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Einheitsvektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \sin \vartheta (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) + \cos \vartheta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\vartheta &= \cos \vartheta (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) - \sin \vartheta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\alpha &= -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y\end{aligned}$$

1.2.3 Umrechnung von Zylinder- in kartesische Koordinaten

Koordinaten

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \alpha \\ y &= \rho \sin \alpha \\ z &= z\end{aligned}$$

Einheitsvektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \cos \alpha \mathbf{e}_\rho - \sin \alpha \mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{e}_y &= \sin \alpha \mathbf{e}_\rho + \cos \alpha \mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

1.2.4 Umrechnung von Kugel- in kartesische Koordinaten

Koordinaten

$$\begin{aligned}x &= r \cos \alpha \sin \vartheta \\y &= r \sin \alpha \cos \vartheta \\z &= r \cos \vartheta\end{aligned}$$

Einheitsvektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_r \sin \vartheta \cos \alpha - \mathbf{e}_\alpha \sin \alpha + \mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta \cos \alpha \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_r \sin \vartheta \sin \alpha + \mathbf{e}_\alpha \cos \alpha + \mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta \sin \alpha \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta\end{aligned}$$

1.2.5 Umrechnung von Zylinder- in Kugelkoordinaten

Koordinaten

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \vartheta &= \arctan \frac{\rho}{z} = \arccos \frac{z}{r} \\ \alpha &= \alpha\end{aligned}$$

Einheitsvektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\rho \sin \vartheta + \mathbf{e}_z \cos \vartheta \\ \mathbf{e}_\vartheta &= \mathbf{e}_\rho \cos \vartheta - \mathbf{e}_z \sin \vartheta \\ \mathbf{e}_\alpha &= \mathbf{e}_\alpha\end{aligned}$$

1.2.6 Umrechnung von Kugel- in Zylinderkoordinaten

Koordinaten

$$\begin{aligned}\rho &= r \sin \vartheta \\ \alpha &= \alpha \\ z &= r \cos \vartheta\end{aligned}$$

Einheitsvektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_r \sin \vartheta + \mathbf{e}_z \cos \vartheta \\ \mathbf{e}_\alpha &= \mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta\end{aligned}$$

1.2.7 Kurven-, Flächen- und Volumenelemente

Zylinderkoordinaten

$$d\mathbf{r} = (d\rho) \mathbf{e}_\rho + (\rho d\alpha) \mathbf{e}_\alpha + (dz) \mathbf{e}_z$$

$$d\mathbf{a} = \rho d\alpha dz \mathbf{e}_\rho$$

$$d\mathbf{a} = d\rho dz \mathbf{e}_\alpha$$

$$d\mathbf{a} = \rho d\rho d\alpha \mathbf{e}_z$$

$$dV = \rho d\rho d\alpha dz$$

Kugelkoordinaten

$$d\mathbf{r} = (dr) \mathbf{e}_r + (r d\vartheta) \mathbf{e}_\vartheta + (r \sin \vartheta d\alpha) \mathbf{e}_\alpha$$

$$d\mathbf{a} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha \mathbf{e}_r$$

$$d\mathbf{a} = r \sin \vartheta dr d\alpha \mathbf{e}_\vartheta$$

$$d\mathbf{a} = r dr d\vartheta \mathbf{e}_\alpha$$

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\alpha$$

1.2.8 Vektorprodukte der Einheitsvektoren

kartesische Koordinaten							
Skalarprodukt				Vektorprodukt			
\cdot	\mathbf{e}_x	\mathbf{e}_y	\mathbf{e}_z	\times	\mathbf{e}_x	\mathbf{e}_y	\mathbf{e}_z
\mathbf{e}_x	1	0	0	\mathbf{e}_x	0	\mathbf{e}_z	$-\mathbf{e}_y$
\mathbf{e}_y	0	1	0	\mathbf{e}_y	$-\mathbf{e}_z$	0	\mathbf{e}_x
\mathbf{e}_z	0	0	1	\mathbf{e}_z	\mathbf{e}_y	$-\mathbf{e}_x$	0
Zylinderkoordinaten							
Skalarprodukt				Vektorprodukt			
\cdot	\mathbf{e}_ρ	\mathbf{e}_α	\mathbf{e}_z	\times	\mathbf{e}_ρ	\mathbf{e}_α	\mathbf{e}_z
\mathbf{e}_ρ	1	0	0	\mathbf{e}_ρ	0	\mathbf{e}_z	$-\mathbf{e}_\alpha$
\mathbf{e}_α	0	1	0	\mathbf{e}_α	$-\mathbf{e}_z$	0	\mathbf{e}_ρ
\mathbf{e}_z	0	0	1	\mathbf{e}_z	\mathbf{e}_α	$-\mathbf{e}_\rho$	0
Kugelkoordinaten							
Skalarprodukt				Vektorprodukt			
\cdot	\mathbf{e}_r	\mathbf{e}_ϑ	\mathbf{e}_α	\times	\mathbf{e}_r	\mathbf{e}_ϑ	\mathbf{e}_α
\mathbf{e}_r	1	0	0	\mathbf{e}_r	0	\mathbf{e}_α	$-\mathbf{e}_\vartheta$
\mathbf{e}_ϑ	0	1	0	\mathbf{e}_ϑ	$-\mathbf{e}_\alpha$	0	\mathbf{e}_r
\mathbf{e}_α	0	0	1	\mathbf{e}_α	\mathbf{e}_ϑ	$-\mathbf{e}_r$	0

Die Tabelle gilt für Spalte mal Zeile. Beispiel: $\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_z$. Die Einheitsvektoren bilden in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem.

Gemischte Skalarprodukte

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_x = \cos \alpha$$

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_y = \sin \alpha$$

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_x = -\sin \alpha$$

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_y = \cos \alpha$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_x = \sin \vartheta \cos \alpha$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_y = \sin \vartheta \sin \alpha$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z = \cos \vartheta$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\rho = \sin \vartheta$$

$$\mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_x = \cos \vartheta \cos \alpha$$

$$\mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_y = \cos \vartheta \sin \alpha$$

$$\mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_z = -\sin \vartheta$$

$$\mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_\rho = \cos \vartheta$$

Gemischte Vektorprodukte

$$\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_x = -\sin \alpha \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_y = \cos \alpha \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_x = -\cos \alpha \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_y = -\sin \alpha \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_x = \cos \vartheta \mathbf{e}_y - \sin \vartheta \sin \alpha \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_y = -\cos \vartheta \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \cos \alpha \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z = \sin \vartheta \sin \alpha \mathbf{e}_x - \sin \vartheta \cos \alpha \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\rho = \cos \vartheta \mathbf{e}_\alpha = -\cos \vartheta \sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \vartheta \cos \alpha \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_x = -\sin \vartheta \mathbf{e}_y - \cos \vartheta \sin \alpha \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_y = \sin \vartheta \mathbf{e}_x + \cos \vartheta \cos \alpha \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_z = \cos \vartheta \sin \alpha \mathbf{e}_x - \cos \vartheta \cos \alpha \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\rho = -\sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha = \sin \vartheta \sin \alpha \mathbf{e}_x - \sin \vartheta \cos \alpha \mathbf{e}_y$$

Achtung: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$!

1.2.9 Ableitungen der Einheitsvektoren

Da $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\alpha$ und \mathbf{e}_ϑ Funktionen von r bzw. ρ, α und ϑ sind, sind hier noch die Ableitungen der Einheitsvektoren angegeben.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \alpha} &= \mathbf{e}_\alpha, & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha} &= -\mathbf{e}_\rho \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} &= \mathbf{e}_\vartheta, & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \alpha} &= \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} &= -\mathbf{e}_r, & \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \alpha} &= \cos \vartheta \mathbf{e}_\alpha \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha} &= -\sin \vartheta \mathbf{e}_r - \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta\end{aligned}$$

1.3 Differentialoperatoren

Siehe hierzu auch Bronstein Abschnitt 4.2.2 (ab Seite 559 in der 24. Auflage [2]).

1.3.1 Gradient

$$\text{grad } U = \nabla U$$

Kartesische Koordinaten

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Zylinderkoordinaten

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Kugelkoordinaten

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha$$

Rechenregeln

$$\text{grad } cU = c \text{grad } U \quad (c = \text{const}); \quad \text{grad } (U_1 + U_2) = \text{grad } U_1 + \text{grad } U_2$$

$$\text{grad } (U_1 U_2) = U_1 \text{grad } U_2 + U_2 \text{grad } U_1; \quad \text{grad } \varphi(U) = \frac{\partial \varphi}{\partial U} \text{grad } U$$

$$\text{grad } (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \text{grad}) \mathbf{G} + (\mathbf{G} \text{grad}) \mathbf{F} + \mathbf{F} \times \text{rot } \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \text{rot } \mathbf{F}$$

1.3.2 Divergenz

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

Kartesische Koordinaten

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho F_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Kugelkoordinaten

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta F_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha}$$

Rechenregeln

$$\operatorname{div} c\mathbf{F} = c \operatorname{div} \mathbf{F} \quad (c = \text{const}); \quad \operatorname{div} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \operatorname{div} \mathbf{F}_1 + \operatorname{div} \mathbf{F}_2$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}_2$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0; \quad \operatorname{div} (U\mathbf{F}) = U \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad} U$$

1.3.3 Rotation

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

Kartesische Koordinaten

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho F_\alpha)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \alpha} \right) \mathbf{e}_z$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial(F_\alpha \sin \theta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \alpha} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial(r F_\alpha)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\alpha \end{aligned}$$

Rechenregeln

$$\operatorname{rot} c\mathbf{F} = c \operatorname{rot} \mathbf{F} \quad (c = \text{const}); \quad \operatorname{rot} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \operatorname{rot} \mathbf{F}_1 + \operatorname{rot} \mathbf{F}_2$$

$$\operatorname{rot} (U\mathbf{F}) = U \operatorname{rot} \mathbf{F} + (\operatorname{grad} U) \times \mathbf{F}$$

$$\operatorname{rot} (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2 \operatorname{grad}) \mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \operatorname{grad}) \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 \operatorname{div} \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_2 \operatorname{div} \mathbf{F}_1$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0; \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F}$$

1.3.4 Laplace-Operator

angewendet auf ein skalares Feld:

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla^2 U$$

angewendet auf ein Vektorfeld:

$$\Delta \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla^2 \mathbf{F}$$

Die Anwendung des Laplace-Operators auf ein Vektorfeld wird im folgenden nur in der Darstellung in kartesischen Koordinaten gezeigt, da die anderen Koordinatendarstellungen zu kompliziert sind (wurde auch noch in keiner Klausur gebraucht, bis jetzt ;-)). Der geneigte Leser kann sie sich an Hand der obigen Definition ja mal zur Übung selbst herleiten.

Kartesische Koordinaten

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

angewendet auf ein Vektorfeld:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F} &= (\Delta F_x) \mathbf{e}_x + (\Delta F_y) \mathbf{e}_y + (\Delta F_z) \mathbf{e}_z \\ &= \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_x \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \right] \end{aligned}$$

1.3.5 Vektorgradient

angewendet auf ein skalares Feld:

$$\mathbf{G} \cdot \text{grad } U = (\mathbf{G} \cdot \nabla) U$$

Ist \mathbf{G} ein Einheitsvektor, so entspricht diese Operation der Richtungsableitung von U in Richtung von \mathbf{G} . Wie man sieht handelt es sich um eine einfache Skalarmultiplikation von \mathbf{G} mit dem Gradienten von U ; die Koordinatendarstellungen beziehen sich daher nur auf die Anwendung auf ein Vektorfeld.

angewendet auf ein Vektorfeld:

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{G} \cdot \text{grad}) \mathbf{F} &= \text{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) + \text{grad}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{F} \text{div } \mathbf{G} + \mathbf{G} \text{div } \mathbf{F} \\ &\quad - \mathbf{F} \times \text{rot } \mathbf{G} - \mathbf{G} \times \text{rot } \mathbf{F} \end{aligned}$$

Kartesische Koordinaten

$$\begin{aligned} (\mathbf{G} \cdot \text{grad}) \mathbf{F} &= (\mathbf{G} \cdot \text{grad } F_x) \mathbf{e}_x + (\mathbf{G} \cdot \text{grad } F_y) \mathbf{e}_y + (\mathbf{G} \cdot \text{grad } F_z) \mathbf{e}_z \\ &= G_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + G_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + G_z \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten

$$(\mathbf{G} \cdot \text{grad}) \mathbf{F} = G_\rho \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} G_\alpha \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} + G_z \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}$$

Kugelkoordinaten

$$(\mathbf{G} \cdot \text{grad}) \mathbf{F} = G_r \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{1}{r} G_\vartheta \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha}$$

Rechenregeln

$$(\mathbf{G} \cdot \text{grad}) U \mathbf{F} = \mathbf{F} (\mathbf{G} \cdot \text{grad } U) + U (\mathbf{G} \cdot \text{grad}) \mathbf{F}$$

1.3.6 Flächendivergenz und Flächenrotation

$$\begin{aligned}\operatorname{Div} \mathbf{F} &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-) \\ \operatorname{Rot} \mathbf{F} &= \mathbf{n} \times (\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-)\end{aligned}$$

Weiteres dazu im Kröger-Buch [1] Abschnitt 3.7 (ab Seite 113).

1.3.7 Differentialoperatoren bei „verschobenem“ Bezugspunkt und retardierten Größen

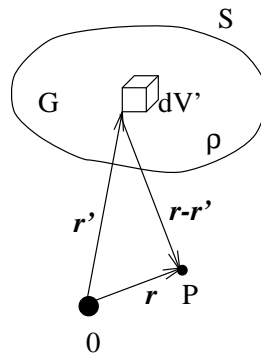


Abbildung 2: Zur Bedeutung von \mathbf{r} und \mathbf{r}'

Mit grad' , div' , rot' und ∇'^2 werden Operatoren definiert, die sich nicht auf den Ursprung beziehen, sondern auf den Aufpunkt P . Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}' \\ R &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \\ \mathbf{R}' &= \mathbf{r}' - \mathbf{r} \\ R' &= |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \operatorname{grad} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\operatorname{grad}' |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \\ \operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= 4\pi\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\operatorname{div}' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= -4\pi\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \nabla'^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \nabla^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla'^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\end{aligned}$$

Die sogenannte retardierte Zeit ist definiert als:

$$t^* = t - \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{c_0}$$

Es wird folgender Formalismus vereinbart:

- „Normale“ Operatoren wirken nur auf ungestrichene Ortsvektoren.
- Gestrichene Operatoren wirken sowohl auf gestrichene Ortsvektoren als auch auf die retardierte Zeit.
- Operatoren mit Schlange wirken auf gestrichene Ortsvektoren, nicht jedoch auf die retardierte Zeit.

Abbildung 3 soll dies verdeutlichen.

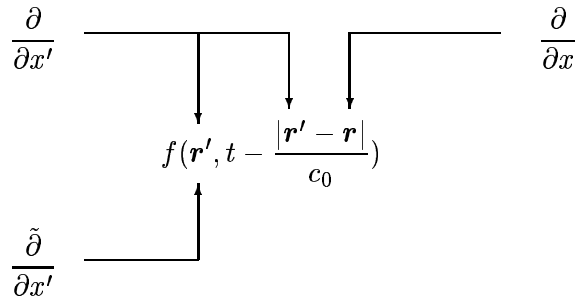


Abbildung 3: Wirkungsbereich der Operatoren

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{grad}' f + \text{grad} f &= \widetilde{\text{grad}}' f \\ \text{grad}' \frac{f}{R} + \text{grad} \frac{f}{R} &= \frac{\widetilde{\text{grad}}' f}{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{div}' \mathbf{g} + \text{div} \mathbf{g} &= \widetilde{\text{div}}' \mathbf{g} \\ \text{div}' \frac{\mathbf{g}}{R} + \text{div} \frac{\mathbf{g}}{R} &= \frac{\widetilde{\text{div}}' \mathbf{g}}{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}' \mathbf{g} + \text{rot} \mathbf{g} &= \widetilde{\text{rot}}' \mathbf{g} \\ \text{rot}' \frac{\mathbf{g}}{R} + \text{rot} \frac{\mathbf{g}}{R} &= \frac{\widetilde{\text{rot}}' \mathbf{g}}{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{\ddot{f}}{c_0^2} - \frac{2\dot{f}}{c_0 R} \\ \nabla^2 \frac{f}{R} &= \frac{\ddot{f}}{c_0^2 R} - 4\pi f \delta(R) \end{aligned}$$

1.4 Integralsätze

Im Folgenden bezeichnet G ein geschlossenes Volumen und ∂G dessen Randfläche, entsprechend bezeichnen S eine geschlossene Fläche und ∂S deren Berandung.

Weitere Angaben dazu siehe Bronstein Abschnitt 4.2.2.10 (ab Seite 577 in der 24. Auflage [2]).

1.4.1 Satz von Gauß

$$\oiint_{\partial G} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

für den Gradienten:

$$\oiint_{\partial G} U d\mathbf{a} = \iiint_G (\operatorname{grad} U) dV$$

für die Rotation:

$$- \oiint_{\partial G} \mathbf{F} \times d\mathbf{a} = \iiint_G \operatorname{rot} \mathbf{F} dV$$

1.4.2 Sätze von Green

$$\oiint_{\partial G} (U_1 \operatorname{grad} U_2) \cdot d\mathbf{a} = \iiint_G [U_1 \Delta U_2 + (\operatorname{grad} U_1) \cdot (\operatorname{grad} U_2)] dV$$

$$\oiint_{\partial G} (U_1 \operatorname{grad} U_2 - U_2 \operatorname{grad} U_1) \cdot d\mathbf{a} = \iiint_G (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1) dV$$

1.4.3 Satz von Stokes

$$\underbrace{\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{Zirkulation}} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$$

1.5 Bestimmung eines Vektorfeldes aus seinen Quellen und Wirbeln

Satz von Helmholtz

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = u \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{u(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{w}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Zur Bedeutung von \mathbf{r} und \mathbf{r}' siehe Abbildung 2.

Nähere Angaben finden sich im Kröger-Buch [1] in den Abschnitten 1.10, 4.4 und 6.6, sowie im Bronstein Abschnitt 4.2.2.11 (Seite 580 in der 24. Auflage [2]).

1.6 Trigonometrische Beziehungen

Weitere, hier nicht aufgeführte Beziehungen siehe Bronstein Abschnitt 2.5.2 (in der 24. Auflage ab Seite 177 [2]).

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

2 Ladung, Strom, und elektromagnetisches Feld

2.1 Coulombsches Gesetz

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{21} = -\mathbf{F}_2$$

2.2 Ladungsdichten

2.2.1 Raumladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad [\rho] = \frac{\text{A sec}}{\text{m}^3} \quad Q = \iiint_G \rho dV$$

2.2.2 Flächenladungsdichte

$$\sigma(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta a} \quad [\sigma] = \frac{\text{A sec}}{\text{m}^2} \quad Q = \iint_S \sigma da$$

2.2.3 Linienladungsdichte

$$\tau(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} \quad [\tau] = \frac{\text{A sec}}{\text{m}} \quad Q = \int_K \tau ds$$

2.2.4 Beispiele

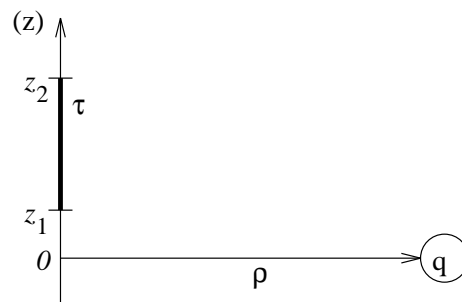


Abbildung 4: Kraftwirkung einer Linienladung

Für die Kraft, die eine Linienladung τ auf der z -Achse auf eine Probeladung q im Abstand ρ von der z -Achse (siehe Abbildung 4) ausübt gilt:

$$\mathbf{F}_q = \frac{q\tau}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{z_2}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{z_1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \right) \mathbf{e}_z \right]$$

Insbesondere gilt für $z_1 \rightarrow -\infty$ und $z_2 \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{F}_q = q \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{e}_\rho$$

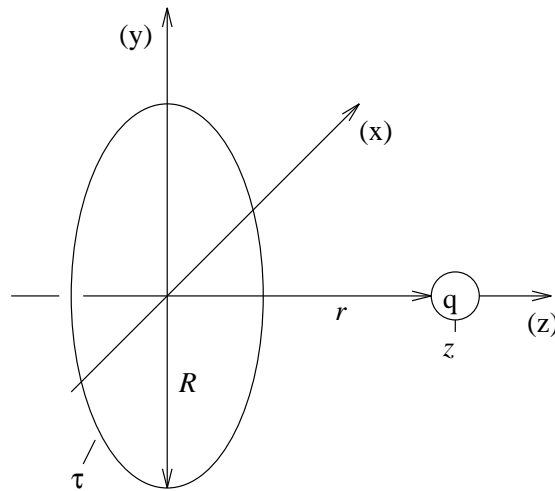


Abbildung 5: Kraftwirkung einer Linienladung 2

Ein Kreisring vom Radius R ist gleichförmig mit der Linienladung τ belegt (Abbildung 5, Übungsaufgabe 4). Die Kraft auf die Punktladung q beträgt:

$$\mathbf{F}_q = \frac{q\tau}{\sqrt{z^2 + R^2}^3} \mathbf{e}_z$$

2.3 Elektrischer Strom

Der Strom, der durch eine Kontrollfläche S fließt, ist definiert als:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \text{genauer} \quad I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_{\uparrow\uparrow} - \Delta Q_{\uparrow\downarrow}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_{\text{verschoben}}}{\Delta t}$$

ΔQ ist die Ladung, die in der Zeit Δt die Fläche S passiert. $\Delta Q_{\uparrow\uparrow}$ passiert S in Zählrichtung, $\Delta Q_{\uparrow\downarrow}$ entgegen der Zählrichtung.

Amperesches Gesetz: Zwei parallele Linienströme i_1, i_2 üben aufeinander die Kräfte

$$\frac{\Delta \mathbf{F}_1}{\Delta s} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi \rho_{12}} \mathbf{e}_{21} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta \mathbf{F}_2}{\Delta s} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi \rho_{12}} \mathbf{e}_{12}$$

pro Längenabschnitt Δs aus.

2.3.1 Stromdichten

Räumliche Stromdichte

$$\mathbf{J} = \rho_+ \mathbf{u}_+ + \rho_- \mathbf{u}_- \quad [\mathbf{J}] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

ρ : Raumladungsdichte, \mathbf{u} : Geschwindigkeit des Ladungstransports.

Flächenstromdichte

$$\mathbf{K} = \sigma_+ \mathbf{u}_+ + \sigma_- \mathbf{u}_- \quad [\mathbf{K}] \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad I = \int_K \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} ds$$

σ : Flächenstromdichte, \mathbf{t} : Einheitsvektor tangential zur stromdurchsetzten Fläche.

2.4 Elektromagnetisches Feld gleichförmig bewegter Punktladungen

Für eine mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{u} auf der z -Achse bewegte Punktladung gilt:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta}} \mathbf{e}_r$$
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta}} \mathbf{u} \times \mathbf{e}_r$$

Für die Sonderfälle $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ bzw. $\frac{u^2}{c_0^2} \ll 1$ gilt:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad \mathbf{B} = \mathbf{o} \text{ bzw.}$$
$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q u_z \sin \vartheta}{4\pi r^2} \mathbf{e}_\alpha$$

Achtung: r , ϑ und \mathbf{e}_r sind hier von t abhängig!

2.5 Elektromagnetische Wechselwirkung zweier gleichförmig bewegter Punktladungen

Lorentzsches Kraftgesetz: Die Kraft auf eine Ladung im äußeren elektromagnetischen Feld ist:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

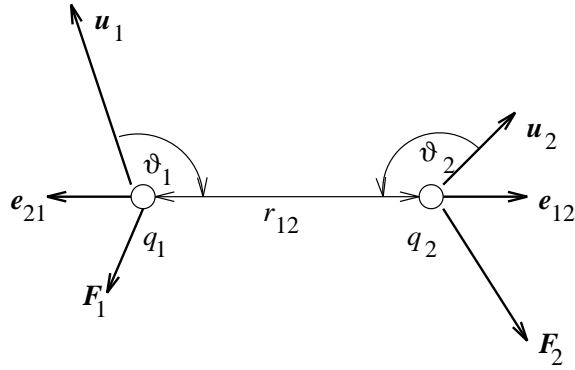


Abbildung 6: Wechselwirkung von Ladungen

$$\mathbf{F}_1 = q_1(\mathbf{E}_2 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_2)$$

$$\mathbf{F}_2 = q_2(\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_2 \times \mathbf{B}_1)$$

mit $f(u, \vartheta) = \frac{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta}}$ ergibt sich:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi r_{12}^2} f(u_2, \vartheta_2) \left[\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{e}_{21} + \mu_0 \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{e}_{21}) \right]$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi r_{12}^2} f(u_1, \vartheta_1) \left[\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{e}_{12} + \mu_0 \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{e}_{12}) \right]$$

Für den Sonderfall $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$, $\mathbf{r}_{12} \perp \mathbf{u}$ gilt:

$$\mathbf{F}_{1\text{el}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}} \mathbf{e}_{21} = -\mathbf{F}_{2\text{el}}$$

$$\mathbf{F}_{1\text{mag}} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi r_{12}^2} \frac{\mu_0 u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}} \mathbf{e}_{21} = -\mathbf{F}_{2\text{mag}}$$

3 Maxwell'sche Gleichungen

3.1 Differentielle Form der Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{Div} \mathbf{E} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ (Induktionsgesetz)} & \operatorname{Rot} \mathbf{E} &= \mathbf{o} \\
 \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{Div} \mathbf{B} &= 0 \\
 \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & \operatorname{Rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{K}
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \text{ (Durchflutungsgesetz)}$$

3.2 Integrale Form der Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\
 \oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= -\oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} (\dot{\mathbf{B}}) \\
 \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} &= 0 \\
 \oint_K \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \\
 \oint_K \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= \mu_0 I \text{ (Durchflutungsgesetz)}
 \end{aligned}$$

3.3 Maxwellgleichungen mit \mathbf{D} und \mathbf{H}

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_{\text{frei}} & \operatorname{Div} \mathbf{D} &= \sigma_{\text{frei}} \\
 \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{pol}}}{\varepsilon_0} & \operatorname{Div} \mathbf{E} &= \frac{\sigma_{\text{frei}} + \sigma_{\text{pol}}}{\varepsilon_0} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} & \operatorname{Rot} \mathbf{E} &= \mathbf{o} \\
 \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{Div} \mathbf{B} &= 0 \\
 \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}_{\text{frei}} + \dot{\mathbf{D}} & \operatorname{Rot} \mathbf{H} &= \mathbf{K}_{\text{frei}} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 [\mathbf{J}_{\text{frei}} + \mathbf{J}_{\text{mag}} + \mathbf{J}_{\text{pol}} + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}] & \operatorname{Rot} \mathbf{B} &= \mu_0 [\mathbf{K}_{\text{frei}} + \mathbf{K}_{\text{mag}}]
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_{\text{pol}} \quad \operatorname{Div} \mathbf{P} = -\sigma_{\text{pol}} \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{J}_{\text{pol}}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = \mathbf{J}_{\text{mag}} \quad \operatorname{Rot} \mathbf{M} = \mathbf{K}_{\text{mag}}$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{\text{frei}}$$

$$\oint_K \mathbf{D} \cdot d\mathbf{r} = -\varepsilon_0 \dot{\Phi}(\dot{\mathbf{B}}) + \oint_K \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\oiint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{a} = -\oiint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\oint_K \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_{\text{frei}} + \iint_s \dot{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{a}$$

Materialgleichungen für lineare und isotrope Stoffe

$$\mathbf{J}_{\text{frei}} = \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \text{ für ruhende Medien}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \left[\mathbf{E} + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} \right) \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right] \text{ für bewegte Medien}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \text{ für ruhende Medien}$$

$$\mathbf{B} = \mu \left[\mathbf{H} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} \right) \mathbf{u} \times \mathbf{D} \right] \text{ für bewegte Medien}$$

3.4 Magnetischer Fluß und seine zeitliche Änderung

Im folgenden bezeichnet S eine Fläche, die von K berandet wird. Der magnetische Fluß durch S ist definiert als:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

Die Änderung des magnetischen Flußes kann durch Änderung des \mathbf{B} -Feldes und/oder durch Bewegung von K hervorgerufen werden. Dies wird in der folgenden Gleichung dargestellt:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \underbrace{\iint_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{a}}_{\dot{\Phi}(\dot{\mathbf{B}})} - \underbrace{\oint_K (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}}_{\dot{\Phi}(\mathbf{u})} \\ \dot{\Phi} &= \dot{\Phi}(\dot{\mathbf{B}}) + \dot{\Phi}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

3.5 Gesetz von Biot-Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_K \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Zu \mathbf{r} und \mathbf{r}' siehe Abbildung 7

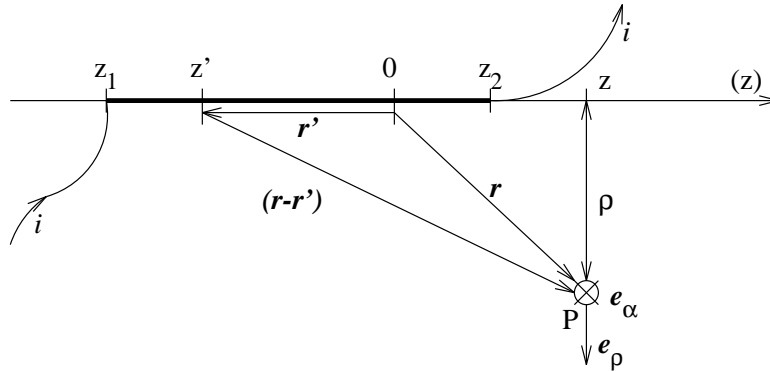


Abbildung 7: Biot-Savart-Gesetz

Der Beitrag $\Delta \mathbf{B}$ des geradlinigen Teilstücks von z_1 bis z_2 des Linienstroms i in Abbildung 7 zum Magnetfeld am Punkt P soll berechnet werden:

$$\Delta \mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \left[\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + \rho^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + \rho^2}} \right] \mathbf{e}_\alpha$$

insbesondere gilt für $z_1 \rightarrow -\infty$, $z_2 \rightarrow +\infty$:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\alpha$$

4 Elektrostatik

4.1 Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{Div} \mathbf{E} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \mathbf{J} &= 0 & \operatorname{Div} \mathbf{J} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 & \operatorname{Rot} \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}$$

4.2 Elektrostatistisches Potential

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad \varphi(P) = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad P_0: \text{Bezugspunkt des Potentials}$$

$$\text{Punktladung: } \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\text{Linienladung}^1: \mathbf{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \mathbf{e}_\rho \quad \varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho}$$

Beispiel: Übungsaufgabe 28

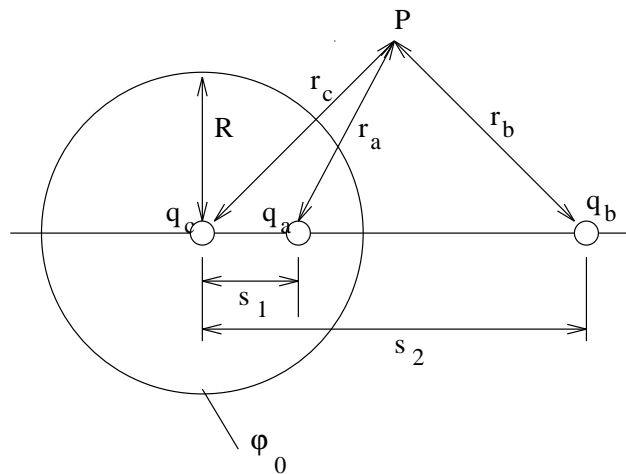


Abbildung 8: Apolloniuskreis

Zunächst werden nur die Ladungen q_a und q_b betrachtet ($q_c = 0$). Es sei: $q_b = -k_0 q_a$, $k_0 > 1$. Das Potential in P ist somit durch

$$\varphi(P) = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{k_0}{r_b} \right)$$

gegeben. Es verschwindet außer auf der Fernkugel auch auf der Kugel, die durch φ_0 angedeutet ist. (Abbildung 8; Der Kreis ist ein sogenannter Apolloniuskreis,

¹unendlich lange Linienladung; ρ_0 : Abstand des Bezugspunktes von der Linienladung

der von den zwei Punkten q_a, q_b ein konstantes Abstandsverhältnis k_0 hat.) Es gelten die Beziehungen:

$$s_1 s_2 = R^2 \quad q_a = -\frac{R}{s_2} q_b$$

Fügt man am Mittelpunkt der Kugel φ_0 eine Ladung q_c ein, so bleibt die Kugel Äquipotentialfläche, das Potential ist:

$$\varphi_0 = \frac{q_c}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_a}{r_a} + \frac{q_b}{r_b} + \frac{q_c}{r_c} \right)$$

Potentialdifferenz, elektrische Spannung

$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2)$$

Verschiebungsarbeit

$$A_{el} = q \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = qU_{12}$$

4.3 Elektrischer Dipol

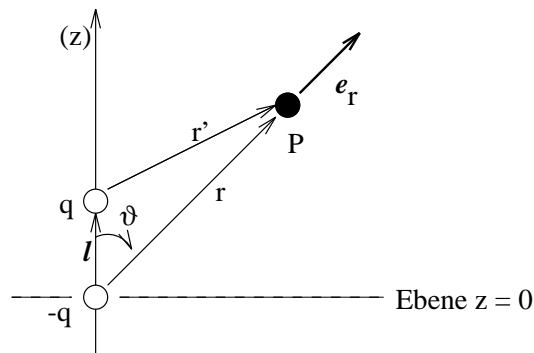


Abbildung 9: Elektrischer Dipol

Das elektrische Dipolmoment \mathbf{p} ist definiert als: $\mathbf{p} = q\mathbf{l} = ql\mathbf{e}_z = p_z\mathbf{e}_z$, siehe Abbildung 9. Das Potential im Punkt P ergibt sich zu:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r'} - \frac{q}{r} \right) = \frac{q}{\epsilon\pi\epsilon_0} \frac{r - r'}{rr'}$$

Führt man den Grenzübergang $l \rightarrow 0$; $\mathbf{p} = \mathbf{const}$ durch, so erhält man den elektrischen Punktdipol. Für ihn gilt:

$$\varphi(P) = \frac{ql \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta)$$

Kräfte bzw. Drehmomente auf Dipole in einem äußeren Feld berechnen sich zu:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} \stackrel{\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}}{=} \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Zwei parallele unendlich lange Geraden, die mit Ladungsdichten τ bzw. $-\tau$ gleichförmig belegt sind, bilden einen Liniendipol. Für ihn gilt:

$$\mathbf{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\rho_1} \mathbf{e}_{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \mathbf{e}_{\rho_2} \right)$$

4.4 Poissonsche Differentialgleichung

Das von einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ hervorgerufene elektrostatische Potential $\varphi(\mathbf{r})$ bzw. das dazugehörige elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$ kann durch Lösung der Poissonschen Differentialgleichung bestimmt werden.

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Grenzbedingungen:

$$\varphi \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty \text{ Fernkugelbezogen}$$

$$\varphi < \infty \text{ für } r \rightarrow 0$$

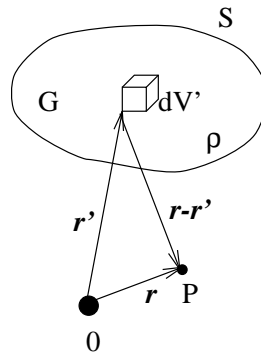
$$\mathbf{n} \cdot [(\nabla\varphi)^+ - (\nabla\varphi)^-] = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\varphi^+ = \varphi^-$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_G \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_G \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Ausführliche Erläuterungen zur Poissonschen Differentialgleichung finden sich im Kröger-Buch [1] in den Abschnitten 4.4 und 4.5 sowie im Bronstein ab Seite 501 (in der 24. Auflage [2]).



Das Potential einer homogen geladenen Kugel mit Ladungsdichte ρ_0 und Radius R ist:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2) & , \quad r < R \\ \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} & , \quad r > R \end{cases}$$

Für das \mathbf{E} -Feld folgt:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r & , \quad r < R \\ \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & , \quad r > R \end{cases}$$

4.5 Energie des \mathbf{E} -Feldes

$$W = \frac{1}{2} \left(\iiint_G \varphi \rho dV + \iint_S \varphi \sigma da \right)$$

Räumliche Energiedichte des \mathbf{E} -Feldes

$$w_e = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint \mathbf{E}^2 dV$$

5 Metallische Leiter

5.1 Ohmsches Gesetz

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= -en\mathbf{u}_D \\ \mathbf{u}_D &= \frac{b}{e}\mathbf{F} \\ \mathbf{F} &= -e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_D \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{J} &= enb\mathbf{E} \\ \Rightarrow \mathbf{J} &= \kappa\mathbf{E} \text{ mit } \kappa = enb\end{aligned}$$

mit e : Elementarladung, n : Dichte der Leitungselektronen, \mathbf{u}_D : Driftgeschwindigkeit, b : Beweglichkeit, κ : Leitfähigkeit

Für in äußeren Magnetfeldern bewegte Leiter gilt:

$$\mathbf{J} = \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

5.2 Hall-Effekt

Bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes gilt für die Driftgeschwindigkeit \mathbf{u}_D der Leitungselektronen:

$$\mathbf{u}_D = -b(\mathbf{E} + \mathbf{u}_D \times \mathbf{B})$$

Für die Stromdichte ergibt sich daraus:

$$\mathbf{J} = \kappa\mathbf{E} - b(\mathbf{J} \times \mathbf{B})$$

Die elektrische Feldstärke läßt sich in einen Anteil \mathbf{E}_{\parallel} parallel zu \mathbf{J} und einen senkrecht \mathbf{E}_{\perp} zu \mathbf{J} zerlegen:

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \frac{1}{\kappa}\mathbf{J} \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{b}{\kappa}(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{u}_D \times \mathbf{B})$$

Der Hall-Koeffizient R_H ist definiert als:

$$R_H = -\frac{b}{\kappa} = \frac{1}{-en}$$

Für \mathbf{J} in x -Richtung und \mathbf{B} in z -Richtung gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\perp} &= R_H B_z J_x \mathbf{e}_y \\ U_H &= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{e}_y dy = R_H B_z J_x l\end{aligned}$$

mit l : Abstand in y -Richtung von P_1 und P_2

5.3 Joulsche Wärme

Die räumliche Leistungsdichte p (Leistung pro Volumen) ist gegeben durch:

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{J}^2$$

$$P = \iiint p dV = RI^2$$

für ohmsche Leiter

5.4 Allgemeines Problem stationärer Stromverteilungen

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad \mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} = -\kappa \operatorname{grad} \varphi$$

κ soll bereichsweise konstant sein, dann gilt für jeden dieser Bereiche:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\kappa \nabla^2 \varphi \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

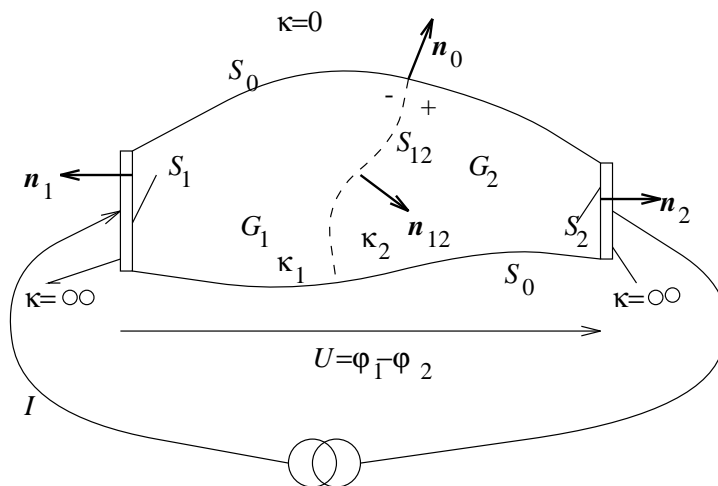


Abbildung 10: Stromverteilung in Leitern

An den Anschlußflächen S_1, S_2 gilt:

$$\iint_{S_1} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_1 da_1 = \frac{I}{\kappa_1} \quad \text{bzw.} \quad \iint_{S_2} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_2 da_2 = -\frac{I}{\kappa_2}$$

mit $\varphi = \text{const}$ auf S_1 bzw. S_2

An Grenzflächen verschiedener Leitfähigkeit gilt:

$$\operatorname{Div} \mathbf{J} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}^+ - \mathbf{J}^-) = 0$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\kappa_1 \nabla^- \varphi - \kappa_2 \nabla^+ \varphi) = 0$$

$$\varphi^+ = \varphi^-$$

An der Grenzfläche des Leiters zur Umgebung S_0 gilt:

$$\mathbf{n}_0 \cdot \nabla \varphi = 0$$

5.5 Stromlose ruhende Metallkörper

In stromlosen, ruhenden Leitern gilt:

$$\mathbf{J} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{o}$$

Eine vorhandene äußere Ladung mit dem Feld $\mathbf{E}^{(q)}$ influenziert auf der Oberfläche des leitenden Körpers eine Flächenladung, die so angeordnet ist, daß ihr Feld $\mathbf{E}^{(\sigma)}$ das Feld im Metallkörper kompensiert:

$$\mathbf{E}^{(q)} + \mathbf{E}^{(\sigma)} = \mathbf{o}$$

An der Grenzfläche gilt, wenn der Normalenvektor \mathbf{n} ins Vakuum zeigt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^- &= \mathbf{o} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^+(P) &= \frac{\sigma(P)}{\varepsilon_0} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}^+(P) &= \mathbf{o} \\ \mathbf{E}^+(P) &= \frac{\sigma(P)}{\varepsilon_0} \mathbf{n}(P) \end{aligned}$$

Bei Influenzaufgaben kann die Rechnung häufig mit sogenannten „Spiegelladungen“ erheblich vereinfacht werden. Handelt es sich um ein Problem mit kugelförmigen Metallkörpern, so kann ein Ansatz mit dem Apolloniuskreis (siehe S. 26) wie in Übungsaufgabe 44 angebracht sein.

5.6 Mehrleitersysteme

$$Q_\nu = -\varepsilon_0 \oiint_{S_\nu} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{a}_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

$$Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$\varphi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3$$

$$\varphi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3$$

$$\varphi_3 = p_{31}Q_1 + p_{32}Q_2 + p_{33}Q_3$$

$$Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 + c_{13}\varphi_3$$

$$Q_2 = c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2 + c_{23}\varphi_3$$

$$Q_3 = c_{31}\varphi_1 + c_{32}\varphi_2 + c_{33}\varphi_3$$

$$p_{\nu\mu} = p_{\mu\nu} \quad c_{\nu\mu} = c_{\mu\nu}$$

$$c_{\nu\nu} > 0 \quad c_{\nu\mu} < 0, \nu \neq \mu \quad \sum_\nu c_{\nu\mu} > 0$$

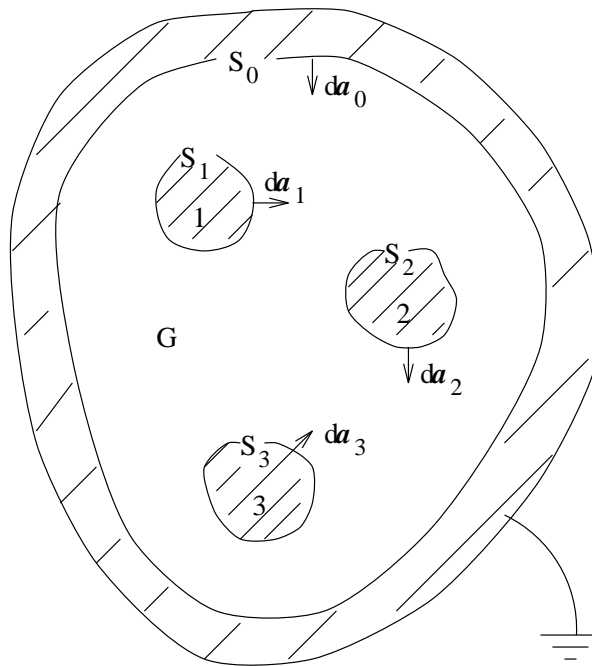


Abbildung 11: Mehrleitersystem

Energie eines Mehrleitersystems

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_G \mathbf{E}^2 dV \\
 &= \frac{1}{2} (Q_1 U_{10} + Q_2 U_{20} + Q_3 U_{30}) \\
 &= \frac{1}{2} (p_{11} Q_1^2 + p_{22} Q_2^2 + p_{33} Q_3^2) + p_{12} Q_1 Q_2 + p_{13} Q_1 Q_3 + p_{23} Q_2 Q_3 \\
 &= \frac{1}{2} (c_{11} U_{10}^2 + c_{22} U_{20}^2 + c_{33} U_{30}^2) + c_{12} U_{10} U_{20} + c_{13} U_{10} U_{30} + c_{23} U_{20} U_{30}
 \end{aligned}$$

Kondensatoren

$$Q = CU$$

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Plattenkondensator:

$$C = \epsilon_0 \frac{a}{l}$$

Kugelkondensator:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_0 r_1}{r_0 - r_1}$$

Teilkapazitäten eines Mehrleitersystems

$$C_{\nu\nu} = \sum_{\mu} c_{\nu\mu} \quad C_{\nu\mu} = -c_{\nu\mu}, \nu \neq \mu$$

$$Q_1 = C_{11}U_{10} + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13}$$

$$Q_2 = C_{21}U_{21} + C_{22}U_{20} + C_{23}U_{23}$$

$$Q_3 = C_{31}U_{31} + C_{32}U_{32} + C_{33}U_{30}$$

6 Magnetostatik

6.1 Grundgleichungen

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}$$

6.2 Vektorpotential

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} \\ \oint_K \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \Phi \quad \Phi: \text{ von } K \text{ umfaßter Fluß} \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'\end{aligned}$$

6.3 Magnetischer Dipol

$$\mathbf{m} = ian$$

Das Vektorpotential am Punkt P ist:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_K \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Führt man den Grenzübergang $a \rightarrow 0$, $\mathbf{m} = ian = \mathbf{const}$ durch, so erhält man den magnetischen Punktdipol. Für ihn gilt:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \mathbf{e}_\alpha$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta)$$

Kräfte bzw. Drehmomente auf Dipole in einem äußeren Feld berechnen sich zu:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{m} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

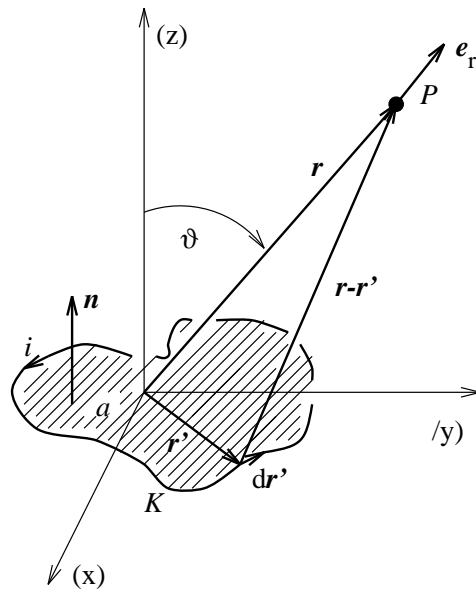


Abbildung 12: Magnetischer Dipol

$$\mathbf{T} = \oint \mathbf{r} \times (i d\mathbf{r} \times \mathbf{B})$$

Für ebene Stromschleifen in homogenen Magnetfeldern gilt nach Übungsaufgabe 53:

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Anmerkung: Die Kraft auf einen Linienstrom im äußeren Magnetfeld berechnet sich zu:

$$\mathbf{F} = i \int (d\mathbf{r} \times \mathbf{B})$$

6.4 Induktivitätskoeffizienten

6.4.1 Selbstinduktivität

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(i)} + B_{\text{fremd}}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{B}^{(i)} \cdot d\mathbf{a} + \iint_S B_{\text{fremd}} \cdot d\mathbf{a} \\ &= \Phi^{(i)} + \Phi_{\text{fremd}} \end{aligned}$$

$$\Phi^{(i)} = \iint_S \mathbf{B}^{(i)} \cdot d\mathbf{a} = Li$$

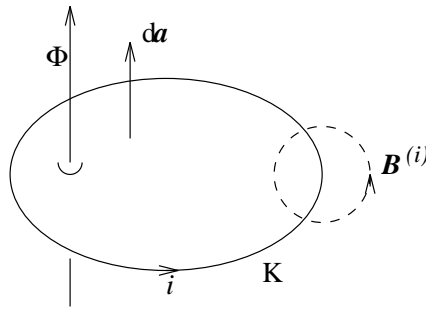


Abbildung 13: Selbstinduktivität

Torusförmige Spule

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\alpha \text{ im Inneren der Spule}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} l \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Langgestreckte Spule

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i N}{l} \mathbf{e}_z \text{ im Inneren der Spule}$$

$$L = \frac{\mu_0 a N^2}{l}$$

6.4.2 Wechselseitige Induktivitäten

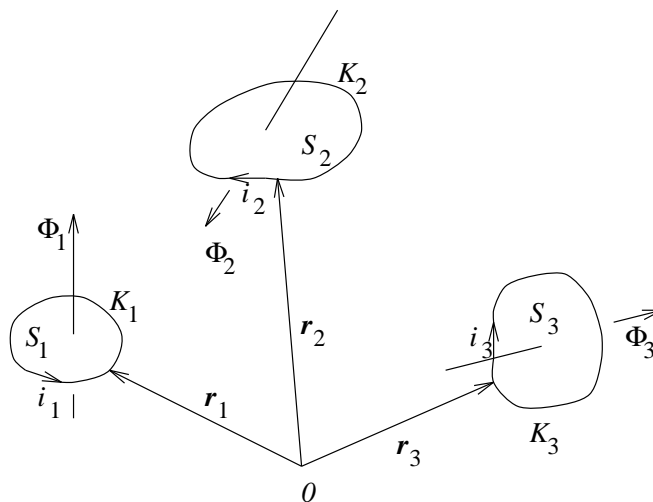


Abbildung 14: Gegeninduktivität

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 i_1 + \Phi_1^{(2)} + \Phi_1^{(3)} \\ \text{mit} \\ \Phi_1^{(\mu)} &= \iint_{S_1} \mathbf{B}^{(\mu)} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{K_1} \mathbf{A}^{(\mu)}(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r}_1 \quad \mu = 2, 3 \\ \text{mit} \\ \mathbf{A}^{(\mu)}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 i_\mu}{4\pi} \oint_{K_\mu} \frac{d\mathbf{r}_\mu}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mu|} \quad \mu = 2, 3 \\ \Rightarrow \\ \Phi_1 &= L_1 i_1 + \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint_{K_1} \oint_{K_2} \frac{d\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{\mu_0 i_3}{4\pi} \oint_{K_1} \oint_{K_3} \frac{d\mathbf{r}_3 \cdot d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} \\ \\ \Phi_1 &= L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 \\ \Phi_2 &= M_{21} i_1 + L_2 i_2 + M_{23} i_3 \\ \Phi_3 &= M_{31} i_1 + M_{32} i_2 + L_3 i_3 \\ \text{mit} \\ M_{\nu\mu} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{K_\nu} \oint_{K_\mu} \frac{d\mathbf{r}_\mu \cdot d\mathbf{r}_\nu}{|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu|} = M_{\mu\nu} \quad \nu \neq \mu \\ \\ \Phi_\nu^{(\mu)} &= \iint_{S_\nu} \mathbf{B}^{(\mu)} \cdot d\mathbf{a}_\nu \end{aligned}$$

6.5 Quasistatische Elektrodynamik

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_C(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\mathbf{r}', t) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= -\nabla \varphi_s(\mathbf{r}, t) \\ \text{mit} \\ \varphi_s(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ \\ \mathbf{B}_{BS}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= \text{rot } \mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) \\ \text{mit} \\ \mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{aligned}$$

Die Indizes C und BS weisen auf die Berechnung nach dem Coulomb- bzw. Biot-Savart-Gesetz hin. Der Index s bedeutet statisch berechnet. Die Felder

\mathbf{E}_C , \mathbf{B}_{BS} befriedigen die Maxwellgleichungen bis auf das Induktionsgesetz. Für „langsam zeitveränderliche“ Stromverteilungen kann jedoch mit der sogenannten **Quasistationären Näherung**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_C(\mathbf{r}, t) - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

gerechnet werden (siehe Kapitel 7). Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}_{BS} \\ \mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -\dot{\mathbf{A}}_s(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_{\text{ind}} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_{BS} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_C &= -\nabla\varphi_s \\ \mathbf{E}_{\text{ind}} &= -\dot{\mathbf{A}}_s \\ \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}_C &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \mathbf{E}_{\text{ind}} &= \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\varphi}_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_C) \end{aligned}$$

7 Induzierte quasistationäre Ströme

Alle in diesem Kapitel gemachten Aussagen gelten nur für „hinreichend langsame“ Stromänderungen. Nimmt man ω als obere Grenzfrequenz der Stromänderungen an, mit $\lambda = c_0 2\pi/\omega$, so muß für die maximale räumliche Ausdehnung l_{max} des Stromschleifensystems gelten:

$$l_{max} \ll \lambda$$

Für verkoppelte Leiterschleifen gilt dann:

$$\begin{aligned}\Phi_1(t) &= L_1 i_1(t) + M_{12} i_2(t) \\ \Phi_2(t) &= M_{21} i_1(t) + L_2 i_2(t) \\ &\Rightarrow \\ -\oint_{K_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \\ -\oint_{K_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_2 &= M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}\end{aligned}$$

7.1 Induzierte Schleifenströme

Für eine **starre, ruhende**, stromdurchflossene Leiterschleife in einem äußeren Magnetfeld gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{B}^{(i)} + \mathbf{B}_{\text{fremd}} \\ \Phi &= \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \dot{\Phi} = \iint_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{a} \quad \text{ruhende Leiterschleife! s. 3.4} \\ \oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_K (\mathbf{E}_C + \mathbf{E}_{\text{ind}}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_K \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{r} \\ \mathbf{E}_{\text{ind}} &= -\dot{\mathbf{A}} \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{\kappa} \mathbf{J} \\ \mathbf{J} &= \frac{i}{a} \frac{d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|} \quad a: \text{Flächeninhalt des Drahtquerschnittes} \\ \dot{R} &= \oint_K \frac{|d\mathbf{r}|}{\kappa a}\end{aligned}$$

Umlaufspannung

$$\oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \dot{R} i = -\dot{\Phi}(\dot{\mathbf{B}}) \quad (\text{Faradaysche Flußregel})$$

$$\dot{\Phi}(\dot{\mathbf{B}}) = L \frac{di}{dt} + \dot{\Phi}_{\text{fremd}}(\dot{\mathbf{B}})$$

$$\Rightarrow -\dot{\Phi}_{\text{fremd}}(\mathbf{B}) = L \frac{di}{dt} + \overset{\circ}{R} i$$

7.2 Energie des B -Feldes

$$\begin{aligned} \oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= -L \frac{di}{dt} \\ P &= \iiint \frac{1}{\kappa} \mathbf{J}^2 dV \\ &= -\frac{dW}{dt} \\ &= i^2 \iiint \frac{dV}{\kappa a^2} = i^2 \oint_K \frac{ds}{\kappa a} = i^2 \overset{\circ}{R} \\ &= i \oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ \frac{dW}{dt} &= iL \frac{di}{dt} \\ dW &= \frac{1}{2} L d(i^2) \\ \Rightarrow W &= \frac{1}{2} L i^2 \end{aligned}$$

Bei mehreren Stromschleifen gilt:

$$W = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + L_3 i_3^2) + M_{12} i_1 i_2 + M_{13} i_1 i_3 + M_{23} i_2 i_3$$

Räumliche Energiedichte des B -Feldes

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 dV \\ W &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint \mathbf{B}^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dV \end{aligned}$$

Für ein Dreischleifensystem nach Bild 14 gilt nach der Substitution $\mathbf{J} dV = i d\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left(i_1 \oint_{K_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_1 + i_2 \oint_{K_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_2 + i_3 \oint_{K_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_3 \right) \\ &= \frac{1}{2} (i_1 \Phi_1 + i_2 \Phi_2 + i_3 \Phi_3) \end{aligned}$$

7.3 Strom-Spannungs-Beziehungen bei Spule und Transformator

Bei Spulen gilt:

$$U = L \frac{di}{dt}$$

Für Transformatoren gilt:

$$\begin{aligned} U_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ U_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

Im Fall $L_1 L_2 = M^2$ spricht man von fester Kopplung und es gilt:

$$U_1 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} U_2$$

Verändern die Spulen des Transformators ihre Form oder ihre gegenseitige Lage, so gilt:

$$\begin{aligned} U_1 = \dot{\Phi}_1 &= \frac{d}{dt} (L_1 i_1 + M i_2) = \frac{dL_1}{dt} i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{dM}{dt} i_2 + M \frac{di_2}{dt} \\ U_2 = \dot{\Phi}_2 &= \frac{d}{dt} (M i_1 + L_2 i_2) = \frac{dM}{dt} i_1 + M \frac{di_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt} i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

7.4 Induktion in bewegten Leitern

Ohmsches Gesetz für bewegte Leiter:

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\kappa}$$

$$\begin{aligned} \overbrace{\oint_K (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}}^{\text{EMK}} &= \overset{\circ}{R} i = -\dot{\Phi}(\mathbf{B}) - \dot{\Phi}(\mathbf{u}) = -\dot{\Phi} \\ \overset{\circ}{R} i &= -\dot{\Phi} \quad (\text{Faradaysche Flußregel}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= Li + \Phi_{\text{fremd}} \\ \dot{\Phi} &= L \frac{di}{dt} + \dot{\Phi}_{\text{fremd}} \\ \Rightarrow \\ -\dot{\Phi}_{\text{fremd}} &= L \frac{di}{dt} + \overset{\circ}{R} i \end{aligned}$$

Ändert die Leiterschleife ihre Form, dann ist L zeitabhängig und es gilt:

$$\dot{\Phi} = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} + \dot{\Phi}_{\text{fremd}}$$

8 Elektrisch polarisierbare Stoffe

In diesem Kapitel werden ruhende Leiter vorausgesetzt, da sonst der Term $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ berücksichtigt werden müßte.

8.1 Elektrische Polarisation

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \frac{d\mathbf{p}}{dV} \\ \text{mit} \\ d\mathbf{p} &= dQ\mathbf{l} \quad dQ = N(-e) \\ \rho_0 &= \frac{dQ}{dV} \\ \mathbf{P} &= \rho_0\mathbf{l} = \frac{dQ}{dV}\mathbf{l}\end{aligned}$$

8.2 Polarisationsladungen

$$\begin{aligned}Q_{\text{pol}} &= -Q_{\text{versch}} \\ dQ_{\text{versch}} &= \rho_0\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}da = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}da \\ Q_{\text{pol}} &= -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_G \rho_{\text{pol}}dV \\ &\Rightarrow \\ \iiint_G \rho_{\text{pol}}dV &= -\iiint_G \text{div } \mathbf{P}dV \\ \text{div } \mathbf{P} &= -\rho_{\text{pol}} \\ \sigma_{\text{pol}} &= \frac{dQ_{\text{versch}}}{da} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \\ \text{Div } \mathbf{P} &= -\sigma_{\text{pol}}\end{aligned}$$

8.3 Polarisationsstrom

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\text{pol}} &= \rho_0 \frac{d\mathbf{l}}{dt} \\ \mathbf{J}_{\text{pol}} &= \dot{\mathbf{P}} \\ \text{div } \mathbf{J}_{\text{pol}} + \dot{\rho}_{\text{pol}} &= 0\end{aligned}$$

8.4 Freie Ladungen und Verschiebungsdichte

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} &= Q_{\text{frei}} \\ \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{r} &= -\varepsilon_0 \dot{\Phi}(\dot{\mathbf{B}}) + \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_{\text{frei}} \\ \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{frei}} \\ \operatorname{Div} \mathbf{D} &= \sigma_{\text{frei}} \\ \varepsilon_0 \operatorname{Div} \mathbf{E} &= \sigma_{\text{pol}} + \sigma_{\text{frei}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Rot} \mathbf{D} &= \operatorname{Rot} \mathbf{P} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \\ \operatorname{Rot} \mathbf{E} &= \mathbf{o}\end{aligned}$$

8.5 Elektrische Materialgrößen

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \varepsilon_r \rho_{\text{pol}} = 0\end{aligned}$$

An Grenzflächen verschiedener Dielektrika gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Div} \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma_{\text{pol}} \quad \text{für } \sigma_{\text{frei}} = 0 \\ \operatorname{Rot} \mathbf{E} &= \mathbf{o} \\ \operatorname{Div} \mathbf{D} &= 0 \quad \text{für } \sigma_{\text{frei}} = 0 \\ \operatorname{Rot} \mathbf{D} &= \operatorname{Rot} \mathbf{P}\end{aligned}$$

Für vollständig mit einem homogenen Dielektrikum gefüllte Kondensatoren gilt:

$$C = \varepsilon_r C_0$$

Achtung: Angaben über freie Ladungen beachten!

9 Magnetisch polarisierbare Stoffe

9.1 Magnetisierung

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}$$

9.2 Magnetisierungsströme

$$\begin{aligned} I_{\text{mag}} &= \oint_K \mathbf{M} \cdot d\mathbf{r} \\ \mathbf{K}_{\text{mag}} &= \text{Rot } \mathbf{M} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \\ \mathbf{J}_{\text{mag}} &= \text{rot } \mathbf{M} \quad \text{in Leitern: } \mathbf{J}_{\text{mag}} = (\mu_r - 1)\mathbf{J}_{\text{frei}} \\ \mathbf{J}_{\text{mag}} &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{J}_{\text{frei}} \end{aligned}$$

9.3 Freie Ströme und magnetische Feldstärke

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \\ \oint_K \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} &= I_{\text{frei}} + \iint_S \dot{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{a} \\ \text{div } \mathbf{H} &= -\text{div } \mathbf{M} \\ \text{Div } \mathbf{H} &= -\text{Div } \mathbf{M} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{Div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J}_{\text{frei}} + \dot{\mathbf{D}} \\ \text{Rot } \mathbf{H} &= \mathbf{K}_{\text{frei}} \\ \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} &= \mathbf{J}_{\text{frei}} + \mathbf{J}_{\text{mag}} + \mathbf{J}_{\text{pol}} + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \\ \frac{1}{\mu_0} \text{Rot } \mathbf{B} &= \mathbf{K}_{\text{frei}} + \mathbf{K}_{\text{mag}} \end{aligned}$$

9.4 Magnetische Materialgrößen

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \chi_m \mathbf{H} = (\mu_r - 1)\mathbf{H} \\ \mathbf{M} &= \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \mathbf{H} \quad \mu = \mu_r \mu_0 \\ \mathbf{B} &= \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \end{aligned}$$

An Grenzflächen zwischen verschiedenen Permeabilitäten gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Div} \mathbf{H} &= -\operatorname{Div} \mathbf{M} \\ \operatorname{Rot} \mathbf{H} &= \mathbf{o} \quad \text{für } \mathbf{K}_{\text{frei}} = \mathbf{o} \\ \operatorname{Div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{Rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{K}_{\text{mag}} \quad \text{für } \mathbf{K}_{\text{frei}} = \mathbf{o}\end{aligned}$$

Für Spulen mit hochpermeablen Kernen gilt:

$$L = \mu_r L_0$$

Achtung: Angaben über freie Ströme beachten!

10 Elektromagnetische Energiebilanz

10.1 Elektrische Energie

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ W_e &= \iiint_G \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 dV = \iiint_G \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV = \iiint_G \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{P} \right] dV \end{aligned}$$

$$\text{Kondensatoren: } W_e = \frac{1}{2} Q_{\text{frei}} U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{q_{\text{frei}}^2}{U}$$

10.2 Magnetische Energie

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ W_m &= \iiint_G \frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 dV = \iiint_G \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 dV = \iiint_G \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \end{aligned}$$

$$\text{Spulen: } W_m = \frac{1}{2} i_{\text{frei}} \Phi = \frac{1}{2} L i_{\text{frei}}^2 = \frac{\Phi^2}{2L}$$

10.3 Elektromagnetische Energiebilanz

$$\begin{aligned} p &= \frac{dP}{dV} = \text{zugeführte räumliche Leistungsdichte} \\ p_{\text{ges}} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{frei}} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

Pointing-Vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \hat{=} \text{„Energiestromdichte“} \\ &\Rightarrow \text{Energiestrom} = \iint_A \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ &= \\ \text{div } \mathbf{S} &= - \left[\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{frei}} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \\ \text{div } \mathbf{S} &= -p_{\text{ges}} \\ \text{div } \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{frei}} &= - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \right] \end{aligned}$$

11 Retardierte Lösungen der Maxwell Gleichungen

11.1 Wellengleichungen

$$\begin{aligned}w(z, t) &= f\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right) \\0 &= \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\0 &= \nabla^2 w - \frac{1}{c^2} \ddot{w} \\o &= \nabla^2 \boldsymbol{w} - \frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{w}} \\s &= \nabla^2 \boldsymbol{w} - \frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{w}}\end{aligned}$$

11.2 Inhomogene Wellengleichungen für \boldsymbol{E} und \boldsymbol{B}

$$\begin{aligned}\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\boldsymbol{E}} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \text{grad } \rho + \mu_0 \dot{\boldsymbol{J}} \\ \nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\boldsymbol{B}} &= -\mu_0 \text{rot } \boldsymbol{J}\end{aligned}$$

11.3 Inhomogene Wellengleichungen für dynamische Potentiale

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \text{rot } \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} &= -\text{grad } \varphi - \dot{\boldsymbol{A}}\end{aligned}$$

Mit der Bedingung $\text{div } \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c_0^2} \dot{\varphi}$ (Lorentz-Bedingung) ergeben sich die Wellengleichungen für \boldsymbol{A} und φ zu:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\boldsymbol{A}} &= -\mu_0 \boldsymbol{J} \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\varphi} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

11.4 Retardierte Potentiale

$$\begin{aligned}t^* &= t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c_0} \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t^*)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
\rho(\mathbf{r}, t) &= -\int_0^t [\text{div} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t')] dt' \quad \text{für } (\mathbf{J}, \rho) \equiv (\mathbf{0}, 0) \text{ für } t < 0 \\
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left[\rho + \frac{R}{c_0} \dot{\rho} \right]^* \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint [\dot{\mathbf{J}}]^* \frac{1}{R} dV' \\
\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left[\mathbf{J} + \frac{R}{c_0} \dot{\mathbf{J}} \right]^* \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV'
\end{aligned}$$

11.5 Lösung der Maxwell-Gleichungen ohne Potentialansätze

$$t^* = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\widetilde{\text{grad}}' \rho(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\widetilde{\text{rot}}' \mathbf{J}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left(\text{grad} \frac{\rho(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \text{grad}' \frac{\rho(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\
&\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left(\text{rot} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \text{rot}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \iiint \frac{[\rho]^*}{R} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{[\dot{\mathbf{J}}]^*}{R} dV' \\
\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \iiint \frac{[\mathbf{J}]^*}{R} dV' \\
&\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \dot{\mathbf{A}}$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

mit

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{[\mathbf{J}]^*}{R} dV'$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{[\rho]^*}{R} dV'$$

11.6 Hertzscher Dipol

Zur Bedeutung der Größen siehe Abbildung 9.

$$p_z(t) = q(t)l$$

$$\dot{p}_z(t) = i(t)l$$

$$t^* = t - \frac{r}{c_0}$$

$$E_r(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p_z}{r^3} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r^2} \right]^* 2 \cos \vartheta$$

$$E_\vartheta(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p_z}{r^3} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r^2} + \frac{\ddot{p}_z}{c_0^2 r} \right]^* \sin \vartheta$$

$$E_\alpha(P, t) = 0$$

$$\mathbf{B}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{p}_z}{r^2} + \frac{\ddot{p}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha$$

11.7 Fitzgeraldscher Dipol

Zur Bedeutung der Größen siehe Abbildung 12.

$$\mathbf{m}(t) = m_z(t)\mathbf{e}_z = ai(t)\mathbf{e}_z$$

$$t^* = t - \frac{r}{c_0}$$

$$\mathbf{E}(P, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{m}_z}{r^2} + \frac{\ddot{m}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha$$

$$B_r(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{m_z}{r^3} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r^2} \right]^* 2 \cos \vartheta$$

$$B_\vartheta(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{m_z}{r^3} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r^2} + \frac{\ddot{m}_z}{c_0^2 r} \right]^* \sin \vartheta$$

$$B_\alpha(P, t) = 0$$

A Naturkonstanten

c_0	$2,998 \cdot 10^8$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Vakuumlichtgeschwindigkeit
ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12}$	$\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$	Dielektrizitätskonstante
μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{\text{N}}{\text{A}^2}$	Permeabilitätskonstante
e	$1,602 \cdot 10^{-19}$	C	Elementarladung

B Symbole

A	Arbeit	$[\text{Nm}] = [\text{J}] = [\text{Ws}]$
\mathbf{A}	Vektorpotential	
a	Flächeninhalt	$[\text{m}^2]$
α	Winkel (Zylinder- bzw. Kugelkoordinate; s. Bild 1)	
\mathbf{B}	magnetische Induktion	
b	Beweglichkeit	
C	Kapazität	$[\text{F}] = [\frac{\text{As}}{\text{V}}]$
$C_{\nu\mu}$	Telikapazitäten	$[\text{F}]$
$c_{\nu\mu}$	Kapazitätzkoeffizienten	$[\text{F}]$
\mathbf{D}	Verschiebungsdichte	
$\delta()$	Deltafunktion (Impuls)	
\mathbf{E}	elektrische Feldstärke	$[\frac{\text{V}}{\text{m}}]$
\mathbf{e}	Einheitsvektor	
ϑ	Winkel (Kugelkoordinate; s. Bild 1)	
\mathbf{F}	Kraft, Vektorfeld	$[\text{N}]$
G	Gebiet (dreidimensional)	
\mathbf{H}	magnetische Feldstärke	
I	Stromstärke (irgendwie verteilt)	$[\text{A}]$
i	Stromstärke eines Linienstroms	$[\text{A}]$
\mathbf{J}	räumliche Stromdichte	$[\frac{\text{A}}{\text{m}^2}]$
\mathbf{J}_{frei}	räumliche freie Stromdichte	$[\frac{\text{A}}{\text{m}^2}]$
\mathbf{J}_{pol}	räumliche Polarisierungsstromdichte	$[\frac{\text{A}}{\text{m}^2}]$

\mathbf{J}_{mag}	räumliche Magnetisierungsstromdichte	$[\frac{\text{A}}{\text{m}^2}]$
K	Kurve	
\mathbf{K}	Flächenstromdichte	$[\frac{\text{A}}{\text{m}}]$
\mathbf{K}_{frei}	flächenhafte freie Stromdichte	$[\frac{\text{A}}{\text{m}}]$
\mathbf{K}_{mag}	flächenhafte Magnetisierungsstromdichte	$[\frac{\text{A}}{\text{m}}]$
k	Wellenzahl	
κ	Leitfähigkeit	$[\frac{1}{\Omega\text{m}}]$
L	Selbstinduktivität	$[\text{H}] = [\frac{\text{Vs}}{\text{A}}]$
λ	Wellenlänge	$[\text{m}]$
M	Gegeninduktivität	$[\text{H}]$
\mathbf{M}	Magnetisierung	
\mathbf{m}	magnetisches Dipolmoment	
N	Anzahl	
n	Konzentration	
\mathbf{n}	Normaleneinheitsvektor	
\mathbf{o}	Nullvektor	
P	Leistung, Aufpunkt	$[\text{W}]$
\mathbf{P}	elektrische Polarisierung	
p	Leistungsdichte	$[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}]$
$p_{\nu\mu}$	Potentialkoeffizienten	
\mathbf{p}	elektrisches Dipolmoment	
Q	Ladung	$[\text{C}] = [\text{As}]$
q	Punktladung	$[\text{C}]$
R	Ohmscher Widerstand, Radius, Abstand Integrationspunkt-Aufpunkt	$[\Omega]$ $[\text{m}]$
r	Abstand Nullpunkt-Aufpunkt (Kugelkoordinate; s. Bild 1)	$[\text{m}]$
\mathbf{r}	Ortsvektor (Aufpunkt)	
ρ	räumliche Ladungsdichte, Abstand z -Achse-Aufpunkt (Zylinderkoordinate; s. Bild 1)	$[\frac{\text{C}}{\text{m}^3}]$ $[\text{m}]$

ρ_{frei}	räumliche freie Ladungsdichte	$[\frac{\text{C}}{\text{m}^3}]$
ρ_{pol}	räumliche Polarisationsladungsdichte	$[\frac{\text{C}}{\text{m}^3}]$
S	Fläche	
\mathbf{S}	Pointing-Vektor	
s	Bogenlänge	
σ	Flächenladungsdichte	$[\frac{\text{C}}{\text{m}^2}]$
σ_{frei}	flächenhafte freie Ladungsdichte	$[\frac{\text{C}}{\text{m}^2}]$
σ_{pol}	flächenhafte Polarisationsladungsdichte	$[\frac{\text{C}}{\text{m}^2}]$
\mathbf{T}	Drehmoment	[Nm]
t	Zeit	[s]
t^*	retardierte Zeit	[s]
\mathbf{t}	Tangenteneinheitsvektor	
τ	Linienladungsdichte	$[\frac{\text{C}}{\text{m}}]$
U	Spannung, skalares Feld	[V]
\mathbf{u}	Geschwindigkeit	$[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$
V	Volumeninhalt	$[\text{m}^3]$
W	Energie	[J]
w	Energiedichte	$[\frac{\text{J}}{\text{m}^3}]$
x, y, z	Kartesische Koordinaten; s. Bild 1	[m]
φ	skalares Potential	
Φ	magnetischer Fluß	
χ_e	elektrische Suszeptibilität	
χ_m	magnetische Suszeptibilität	
ω	Kreisfrequenz	$[\frac{1}{\text{s}}]$

Index

- Additionstheoreme, 17
- Amperesches Gesetz, 19
- Apolloniuskreis, 25

- Biot-Savart-Gesetz, 24

- Coulombsches Gesetz, 18

- Dipol
 - elektrischer Punkt-, 26
 - Fitzgeraldscher -, 49
 - Hertzscher -, 49
 - Linien-, 27
 - magnetischer -, 34
- Divergenz, 10
- Durchflutungsgesetz, 22

- Elektrostatik
 - Grundgleichungen, 25
 - Poissonsche Dgl, 27
 - Potential, 25
 - Verschiebungsarbeit, 26
- Energie
 - des \mathbf{B} -Feldes, 40
 - des \mathbf{E} -Feldes, 28
 - eines Mehrleitersystems, 32
 - elektrische, 46
 - elektromagnetische -bilanz, 46
 - magnetische, 46

- Faradaysche Flußregel, 39, 41
- Flächendivergenz, 13
- Flächenelement, 8
- Flächenladungsdichte, 18
- Flächenrotation, 13

- Gradient, 10
- Grenzfläche
 - Metall-Vakuum, 31
 - zwischen Bereichen verschiedener Leitfähigkeit, 30

- Hall-Effekt, 29
- Helmholtzscher Satz, 16

- Induktionsgesetz, 22

- Induktivität, 35
- Influenz, 31
- Integralsätze
 - von Gauß, 16
 - von Green, 16
 - von Stokes, 16

- Joulesche Wärme, 30

- Kapazität, 32
- Kondensator, 32, 43, 46
- Koordinaten
 - kartesische, 6, 7
 - Kugel, 6, 7
 - Zylinder, 6, 7
- Koordinatensysteme, 5
- Kraft
 - auf Linienstrom im \mathbf{B} -Feld, 35
- Kurvenelement, 8

- Laplace-Operator, 12
- Linienladungsdichte, 18
- Lorentz-Bedingung, 47
- Lorentzsches Kraftgesetz, 20

- magnetischer Fluß, 23
- Magnetisierung, 22, 44
- Magnetostatik
 - Grundgleichungen, 34
 - Vektorpotential, 34
- Maxwellsche Gleichungen
 - differentielle Form, 22
 - integrale Form, 22
 - mit \mathbf{D} und \mathbf{H} , 22

- Ohmsches Gesetz, 29
 - für bewegte Leiter, 41

- Pointing-Vektor, 46
- Poissonsche Differentialgleichung, 27
- Polarisation, 22, 42
- Potential
 - dynamische -e, 47
 - einer homogen geladenen Kugel, 28
 - elektrostatisches, 25

- retardiert, 47
- Vektorpotential, 34

- Raumladungsdichte, 18
- Richtungsableitung, 13
- Rotation, 11

- Skalarprodukt
 - der Einheitsvektoren, 8
 - Rechenregeln, 5
- Spannung, 26
- Spule, 36, 41, 45, 46
- Strom, 19
- Stromdichte
 - Flächenstromdichte, 20
 - räumliche-, 20

- Transformator, 41

- Vektorgradient, 13
- Vektorpotential, 34
- Vektorprodukt
 - der Einheitsvektoren, 8
 - Entwicklungssatz, 5
 - Rechenregeln, 5
- Volumenelement, 8

- Welle, 47

- Zirkulation, 16